Déterminer la masse de la Terre – Corrigé

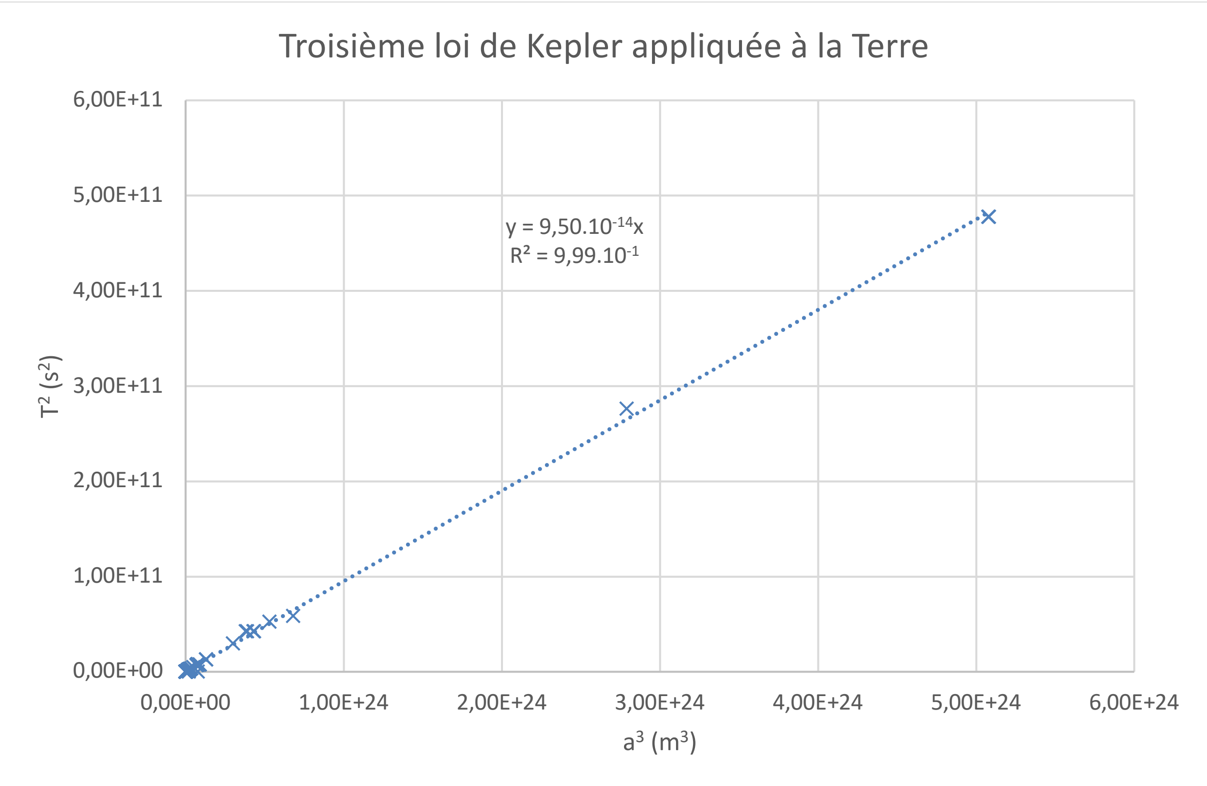
- Système : satellite
- Référentiel géocentrique supposé galiléen
- On se place dans le repère de Frenet
  - $\vec{v}\binom{v}{0}$
  - $\vec{a}\begin{pmatrix}\frac{dv}{dt}\\ \frac{v^2}{d}\end{pmatrix}$
- Bilan des forces :
  - Force gravitationnelle $\overrightarrow{F_G}\begin{pmatrix}0\\ G\frac{M_T m}{d^2}\end{pmatrix}$
  - On se trouve en dehors de l'atmosphère. Il n'y a donc pas de frottements.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\overrightarrow{F_G} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_G} \Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{dv}{dt}\\ \frac{v^2}{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ G\frac{M_T}{d^2}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\frac{dv}{dt} = 0\\ \frac{v^2}{d} = G\frac{M_T}{d^2}\end{cases}$$

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cste$. Le mouvement du satellite est uniforme : $v = \frac{2\pi d}{T}$

$\frac{v^2}{d} = G\frac{M_T}{d^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{d^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi d}{T}\right)^2 = G\frac{M_T}{d^2} \Rightarrow \frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ On retrouve bien la 3ème loi de Kepler



$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}a^3$$

D'après le graphe tracé, on a $k = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{Gk} = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11}\times 9{,}50.10^{-14}} = 6{,}2.10^{24}\ kg$